

Воловик А.Ю.

<https://orcid.org/0000-0002-8772-9843>

Вінницький національний технічний університет

Ніколенко М.С.

<https://orcid.org/0009-0007-0110-2964>

Вінницький національний технічний університет

ОЦІНЮВАННЯ СТАНУ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ У ПРИСУТНОСТІ НЕСПРАВНОСТЕЙ КАНАЛУ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Методи оцінювання станів динамічних систем знайшли широке застосування в різних галузях прикладних досліджень. Найбільш відомим з них є метод фільтра Калмана в якому інформаційним джерелом для корекції оцінок є результати спостережень сенсорної підсистеми, а індикатором коректної роботи схеми оцінювання є інноваційний процес. Для номінального режиму роботи, останній, є гаусовим некорельованим випадковим процесом, що має нульове середнє значення і апріорно обчислювальну коваріаційну матрицю. У разі появи раптових несправностей або структурно невизначених збурень у сенсорній підсистемі зазначені умови порушуються. Метою представленої роботи є розробка методу, що дозволяє відновити нормальну працездатність фільтра Калмана за визначених умов. Поставлена мета досягається шляхом застосування спеціального взаємодозначного перетворення рівняння виходу досліджуваної системи, внаслідок чого складова збурень поглинається в рівнянні екстраполяції вектора стану динамічної системи. Застосовані для рішення поставленої задачі припущення збігаються з тими, які зазвичай приймаються в класичній теорії лінійної фільтрації, при цьому збурення мають абсолютний довільний характер, не підлягають ймовірнісному опису та не мають верхньої межі обмеженості. Для забезпечення коректності розв'язку поставленої задачі формулюються припущення, які стосуються обмеженості системних матриць, що дозволяє уникнути невизначених рішень. На наступному етапі, до скоректованої системи застосовується певним чином модифікований фільтр Калмана. Значна увага приділена аналізу властивостей отриманого фільтра, що стосуються стійкості помилок оцінювання. Функціональна працездатність запропонованого методу була підтверджена шляхом статистичного моделювання на тестовому прикладі лінійної динамічної системи третього порядку. На відміну від інших відомих методів проектування, запропонований метод характеризується відносно простим алгоритмом та реалізацією, а перевірка умов існування рішення не потребує занадто складних процедур, що робить його практично зручним для застосування.

Ключові слова: оптимальне оцінювання стану на фоні несправностей, лінійні динамічні системи, фільтр Калмана, збурення з невизначеною структурою.

Постановка проблеми. Оцінювання станів динамічних систем знайшло широке застосування в різних галузях практичної діяльності, наприклад, в аерокосмічних додатках, діагностиці несправностей технічних систем, в системах автоматичного управління, в хіміко-технологічних системах з метою контролю якості продукції, що випускається, тощо. Актуальність проблеми отримання оцінок станів лінійних динамічних систем, вільних від впливу структурно невизначених збурень, підтверджується її значенням для багатьох прикладних досліджень,

зокрема у галузі функціональної діагностики, де точність оцінювання визначає ефективність діагностичних процедур.

Найбільш відомими і традиційно використовуваними класичними методами оцінювання станів в подібних випадках є методи фільтра Калмана і спостерігачів Люенбергера. В цих алгоритмах інформаційним джерелом для корекції оцінок є результати спостережень сенсорної підсистеми, а індикатором коректної роботи схеми оцінювання є інноваційний процес. Для номінального режиму роботи, останній, є гаусовим некорельованим



випадковим процесом, що має нульове середнє значення і апріорно обчислювальну коваріаційну матрицю. У разі появи раптових несправностей або структурно невизначених збурень у сенсорної підсистеми зазначені умови порушуються, а адекватність оцінок загально прийнятих алгоритмів стає сумнівною, малоефективною і, при певних умовах, призводить до втрати алгоритмічної стійкості. Сформульовані факти породжують науково-технічну проблему, яка полягає у необхідності розвитку методів, що дозволяють відновлювати нормальну працездатність фільтра Калмана за визначених умов. В дному дослідженні задачу вирішено введенням взаємо-однозначного перетворення рівняння виходу, яке поглинає збурення на етапі екстраполяції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогоднішній день, відомі досягнення в теорії оцінювання припускають, що в будь-яку несправність або збурення доцільно інтерпретувати у вигляді додаткових невідомих входів в подальшому які, або підлягають оцінюванню або, за для подолання впливу, відокремлюється від алгоритму безпосереднього оцінювання. Загалом, дослідження, присвячені оцінюванню станів у присутності несправностей та збурень із невизначеною структурою, мають тривалу історію розвитку, яка простягається до сучасного етапу [1–4]. Мета подібних досліджень полягала в розробці методів отримання оцінок станів, вільних від впливів збурюючих входів. Стійкість отриманих оцінок гарантувалася за рахунок введення додаткових обмежень у вигляді матричних нерівностей, що стосуються, в основному, системних матриць. Як правило, вільні ресурси, що залишаються після задоволення зазначених нерівностей, прийнято використовувати для цілей оптимізації [4, 5].

У ряді інших робіт [6–8] розгляду підлягали стохастичні лінійні системи з невизначеними збурюючими входами, де оптимізація здійснювалася шляхом мінімізації сліду коваріаційної матриці помилок оцінювання. При цьому такому важливому питанню, як стійкість отриманих рішень щодо помилок оцінювання, не завжди приділялася належна увага. Крім того, слід зауважити, що досить великий клас нелінійних систем можна звести до розгляду лінійних систем із змінними або постійними параметрами шляхом відповідної апроксимації нелінійних залежностей. З цих причин вивчення лінійних систем з вищевказаних позицій, ще досі залишається активним полем дослідницької діяльності [9–11].

Постановка завдання. Мета представленої роботи полягає в розробці методу отримання оцінок станів лінійної дискретної стохастичної системи на фоні несправностей або структурно невизначених збурень у каналі спостереження. В основу методу покладено ідею поглинання вище вказаних небажаних явищ шляхом введення взаємо-однозначного перетворення рівнянь виходу системи і подальшого застосування модифікованого методу фільтра Калмана.

У структурному відношенні робота сформована таким чином, що її зміст послідовно розкриває основні етапи дослідження: у розділі 2 сформульовано постановку задачі в математичному сенсі; у розділі 3 розглядається взаємо-однозначне математичне перетворення виходу початкової системи, призначене для поглинання збурень у вихідних даних; результати застосування методу Калмана до перетвореної системи обговорюються в розділі 4, а в наступних розділах наведені результати моделювання, підведені підсумки дослідження та список використаної літератури.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо лінійну дискретну стохастичну систему математична модель, яка допускає опис в термінах змінних стану

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{W}_k \mathbf{s}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{d}_k + \mathbf{n}_k; \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \xi_k \quad (2)$$

де $\mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^n$ – поточний стан системи, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$ – вектор виходу, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$ – точно відомий керуючий вплив, $\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^q$ – несправності або збурення з невизначеною структурою, $\mathbf{n}_k \in \mathbb{R}^n$ – шум стану, $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ – шум виходу системи, $\mathbf{W}_k, \mathbf{G}_k, \mathbf{D}_k, \mathbf{H}_k$ – відомі системні матриці, відповідних розмірностей. Початковий стан $\mathbf{s}_0 \in \mathbb{R}^n$ являє собою гаусів випадковий вектор із середнім значенням $\bar{\mathbf{s}}_0$ і позитивно визначеною коваріаційною матрицею \mathbf{P}_0 . Випадкові послідовності \mathbf{n}_k, ξ_k є незалежними білими гаусовими шумами, некорельованими з \mathbf{s}_0 , мають нульові середні значення і обмежені коваріаційні матриці $E\{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T\} = \mathbf{Q}_k$ і $E\{\xi_k \xi_k^T\} = \mathbf{R}_k$, відповідно. Перераховані припущення збігаються з тими, які зазвичай приймаються в класичній теорії лінійної фільтрації без урахування матриці \mathbf{D}_k , яка там відсутня. Незважаючи на те, що шуми \mathbf{n}_k, ξ_k є випадковими процесами, передбачається, що збурення \mathbf{d}_k абсолютно довільні, не мають ні ймовірнісного опису, ні навіть обмеженості зверху. Однак для розв'язності поставленої задачі вводяться припущення: послідовність матриць

$\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{D}_k$ повинна бути обмеженою; $q \leq t$ тобто число збурень не більше числа вихідних сенсорів; для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$, найменше сингулярне значення матричного добутку $\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{D}_k$ не менше γ , де γ – задане додатне число.

Останні два обмеження по суті означають, що матричний добуток $\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{D}_k$ має повний ранг по стовпцях, і вони необхідні для здійснення процедури поглинання збурень. Завдання полягає в розробці методу оцінювання вектора стану \mathbf{s}_k , вільного від впливу збурень \mathbf{d}_k , виходячи з доступності результатів спостережень \mathbf{y}_k , послідовності точно відомих керуючих впливів \mathbf{u}_k і системних матриць $\mathbf{W}_k, \mathbf{G}_k, \mathbf{D}_k, \mathbf{H}_k$. У теорії оптимальної лінійної фільтрації стійкість фільтра Калмана гарантується введенням припущень про керованість і спостережуваність досліджуваної системи [13, 14]. Аналогічні умови будуть сформульовані і для розглянутого випадку після того, як буде здійснена процедура поглинання збурень.

Обґрунтування взаємно-однозначного перетворення виходу системи. У цьому розділі переслідується локальна мета, а саме обґрунтування процедури поглинання складової в рівнянні стану системи шляхом введення відповідного перетворення рівняння виходу таким чином, щоб згодом стало можливим застосування фільтра Калмана, вільного від впливу збурень. Подібне завдання вперше було розглянуто в роботі [15], а більш сучасна інтерпретація подана в [16, 17]. У зазначених дослідженнях структура лінійного фільтра визначалася рівнянням, що слугувало основою для подальшого розвитку методів оцінювання станів систем

$$\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k+1} = \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{s}}_k + \mathbf{L}_k [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{s}}_k]. \quad (3)$$

У цьому рівнянні складова $\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{D}_k$ не враховувалася, оскільки вона – величина, яка точно відома і для задачі синтезу оптимального лінійного фільтра є несуттєвою. Матриця передачі фільтра \mathbf{L}_{k+1} визначалася в результаті вирішення задачі мінімізації по відношенню до коваріаційної матриці помилок оцінювання за умови, що справедливо введено обмеження

$$\mathbf{L}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{D}_k - \mathbf{D}_k = 0. \quad (4)$$

Це гарантувало відсутність впливу складової на помилку оцінювання стану. Розв’язання задачі локальної оптимізації з урахуванням (4) призвело до істотного ускладнення процесу обчислення матриці передачі \mathbf{L}_{k+1} порівняно з класичним фільтром Калмана, і було не зовсім очевидно як аналізувати стійкість синтезованого фільтра. Тому

в даній статті основна увага приділена питанню поглинання збурення ще до процесу проектування фільтра, а на другому етапі проводиться синтез потрібного фільтра в припущенні складової збурення в рівнянні стану (1).

Припустимо, що існує якась обмежена матрична послідовність, конкретний вигляд якої буде визначений дещо пізніше. Тоді з співвідношення (2) безпосередньо випливає

$$\mathbf{M}_k [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{s}_{k+1} - \mathbf{n}_{k+1}] = 0. \quad (5)$$

Далі додаймо до кожної сторони рівняння (5) рівняння (1)

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{W}_k \mathbf{s}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{d}_k + \mathbf{n}_k + \mathbf{M}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{s}_{k+1} - \mathbf{n}_{k+1}]. \quad (6)$$

Після приведення подібних членів отримуємо вираз, в якому рівняння виходу участі вже не приймає:

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{Z}_{k+1} [\mathbf{W}_k \mathbf{s}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{d}_k] + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1} + \mathbf{Z}_{k+1} \mathbf{n}_k - \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{n}_{k+1} \quad (7)$$

де $\mathbf{Z}_{k+1} \triangleq [\mathbf{I}_n - \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}]$.

Якщо матрична послідовність \mathbf{M}_{k+1} обрана таким чином, щоб в кожен момент часу k виконується обмеження $\mathbf{Z}_{k+1} \mathbf{D}_k = 0$, тоді рівняння (7) прийме вигляд:

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{W}1_k \mathbf{s}_k + \mathbf{G}1_k \mathbf{u}_k + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1} + \mathbf{w}_k, \quad (8)$$

де $\mathbf{W}1_k \triangleq \mathbf{Z}_{k+1} \mathbf{W}_k$; $\mathbf{G}1_k \triangleq \mathbf{Z}_{k+1} \mathbf{G}_k$;

$\mathbf{w}_k \triangleq \mathbf{Z}_{k+1} \mathbf{n}_k - \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{n}_{k+1}$.

При цьому коваріаційна матриця перетвореного шуму стану \mathbf{w}_k повинна обчислюватися за формулою

$$\mathbf{Q}1_k \triangleq \mathbf{Z}_{k+1} \mathbf{Q}_k \mathbf{Z}_{k+1}^T + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_k \mathbf{M}_{k+1}^T. \quad (9)$$

Звернувшись до рівняння (8) неважко помітити, що тепер збурюючий вплив $\mathbf{D}_k \mathbf{d}_k$ у явній формі виключений з подальших перетворень. На даному етапі важливим є те, що поглинання збурення здійснюється в момент $k+1$ замість моменту часу k . Умова, якій повинна задовольняти матриця передачі розглянутого фільтра \mathbf{M}_{k+1} подібно до тієї, яка була введена в роботі [12], а саме $\mathbf{Z}_{k+1} \mathbf{D}_k = [\mathbf{I}_n - \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] \mathbf{D}_k = 0$. Однак тут є істотна відмінність – вираз у квадратних дужках, надає більше ступенів свободи у виборі величини матричного коефіцієнта передачі \mathbf{M}_{k+1} , оскільки він не пов’язаний з вирішенням задачі мінімізації. Цю матрицю можна визначити в результаті вирішення матричного рівняння $\mathbf{M}_{(k+1)} \mathbf{H}_{(k+1)} \mathbf{D}_k = \mathbf{D}_k$. Оскільки передбачається справедливості припущення, що в матричному добутку $\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{D}_k$ кількість стовпців не перевищує кількість рядків, то

це означає, що рішення для \mathbf{M}_{k+1} повинно існувати. У більшості практичних застосувань зазначена нерівність виконується. З урахуванням цього зауваження отримуємо [5]

$$\mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{D}_k [\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{D}_k]^\# , \quad (10)$$

де символом $[\bullet]^\#$ позначена псевдо обернена матриця Мура-Пенроуза.

Аналіз властивостей модифікованого фільтра Калмана. Повертаючись до перетвореної моделі стану (8), неважко побачити, що тут вектори стану \mathbf{s}_k , входу \mathbf{u}_k і виходу \mathbf{y}_k залишилися не змінними. Таким чином, початкова модель (1) і модифікована (8) є, по суті, еквівалентними, оскільки описують одну і ту ж систему, а складову $\mathbf{M}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1}$ можна інтерпретувати як новий відомий вхід. У цьому випадку немає формальних перешкод для застосування стандартної процедури оцінювання за методом Калмана, оскільки складова збурень у явній формі відсутня. З метою подальшого спрощення задачі припустимо, що кореляція між векторами \mathbf{n}_k і ξ_k відсутня. Тоді застосування класичного фільтра Калмана до перетвореної моделі (8) сформує в рекурентній формі наступні оцінки станів $\hat{\mathbf{s}}_k$ і їх коваріаційні матриці \mathbf{P}_k для всіх $k=0,1,2,3,\dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{W}1_k \mathbf{P}_k \mathbf{W}1_k^T + \mathbf{Q}1_k; \\ \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{P}_{k+1}^{-1}; \\ \mathbf{P}r_{k+1} &\triangleq E \{ \mathbf{r}_{k+1} \mathbf{r}_{k+1}^T \} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}; \\ \mathbf{P}_{k+1|k+1} &= [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] \mathbf{P}_{k+1|k}; \\ \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}; \\ \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k} &= \mathbf{W}1_k \hat{\mathbf{s}}_k + \mathbf{G}1_k \mathbf{u}_k + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1}; \\ \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{r}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{s}}_{0|0} &= \bar{\mathbf{s}}_0; \quad \mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{P}_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для того, щоб модифікований фільтр Калмана був гарантовано стійким, необхідно сформулювати ще два обмеження, додатково до тих, які вже наводилися в другому розділі. Суть їх зводиться до рівномірної повної спостережності пари $[\mathbf{W}1_k, \mathbf{H}_k]$ і рівномірної повної керованості пари $\{ \mathbf{W}1_k [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k], \mathbf{Q}_k^{-1} \}$, що визначаються за допомогою матриці Грама. Вони дещо відрізняються від тих, які прийняті в теорії калманівської фільтрації, оскільки ця теорія безпосередньо не може бути застосована до розглянутої специфічної задачі. Дискутуючи по відношенню до властивостей синтезованого фільтра, слід зазначити наступне:

1. *Обмеженість.* Якщо введені припущення мають місце, то рекурентно обчислювані матриці $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$ і $\mathbf{P}_{k+1|k}$, а значить і $\mathbf{P}r_{k+1}$, \mathbf{K}_k , є обмеженими. Іншими словами, зазначена властивість гарантує обмеженість всіх рекурентних обчислень, виключаючи оцінки вектору стану. Через наявність білого гаусового шуму помилки оцінювання стану в принципі не можуть бути обмеженими, проте обмеженим є другий момент – коваріаційна матриця помилок фільтрації. Зазначена властивість важлива для додатків, в яких всі обчислення повинні виконуватися в режимі реального часу.

2. *Стійкість.* При зроблених припущеннях, динамічні помилки оцінок стану (11) будуть тільки експоненціально стійкими, оскільки в даному випадку порушується одна з основних умов теорії фільтра Калмана – оберненість перехідної матриці станів $\mathbf{W}1_k$. Насправді ця матриця відповідно до виразу (7) є завжди сингулярною. Завдання забезпечення стійкості розглянутого фільтра, що вирішується в рамках теорії фільтра Калмана без вимоги оберненості перехідної матриці станів виходить за межі даної роботи. Однак, якщо ввести позначення для помилки оцінювання вектора станів $\tilde{\mathbf{s}}_k \triangleq \mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_k$, то динаміку помилок оцінювання можна представити рівнянням

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}_{k+1|k+1} &\triangleq [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] \mathbf{W}1_k \hat{\mathbf{s}}_k + \\ &+ [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{n}_{k+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Згідно з [14], збіжність помилок оцінювання визначається тільки детермінованою частиною рівняння (12), яка характеризується виразом $[\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] \mathbf{W}1_k$. Оскільки обчислення \mathbf{K}_{k+1} детерміновані, то стійкість динаміки помилок фільтрації забезпечується тільки припущеннями зробленими щодо $\mathbf{W}1_k, \mathbf{H}_{k+1}, \mathbf{Q}1_k$. Отже, на другу властивість корельованість процесів не впливає.

3. *Оптимальність.* Тут слід зауважити, що ігнорування кореляції між процесами \mathbf{n}_k і ξ_k призводить до втрати оптимальності модифікованого фільтра. Однак, як показало подальше моделювання, ці втрати відносно невеликі. Зазвичай на практиці, заради спрощення процедури оцінювання, цією корельованістю часто нехтують. У розглянутому випадку не зовсім очевидно, як слід враховувати кореляцію, обумовлену введенням перетворенням рівняння виходу системи, і це може бути предметом подальших досліджень.

Результати моделювання. Як тестовий приклад розглянемо дискретну динамічну систему, яка допускає опис співвідношеннями (1)–(2) при наступних значеннях системних матриць:

$$\mathbf{W}_k = \begin{bmatrix} 0.2995 & 0.0517 & 0.0314 \\ -0.0786 & -0.0286 & -0.0057 \\ 0.0141 & -0.0195 & -0.0186 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 0.7005 \\ 0.0786; \\ -0.01441 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_k = [1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0]; \quad \mathbf{D}_k = [2.9798; -0.7005; -0.0786];$$

Практичним аналогом описаної моделі може виступати система прецизійного терморегулювання на основі просторово розподілених температурних сенсорів. Коваріаційні матриці шумових процесів \mathbf{n}_k, ξ_k , приймали значення $\mathbf{Q} = 8 \cdot 10^{-4} \cdot \mathbf{I}_3$; $\mathbf{R} = 7 \cdot 10^{-3} \cdot \mathbf{I}_2$ відповідно, а середні значення передбачалися нульовими. Процес появи несправностей моделювався виразом:

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} k \leq 100, & \mathbf{d}_k = 0; \\ 100 \leq k \leq 300, & \mathbf{d}_k = -0.2; \\ 300 \leq k \leq 500, & \mathbf{d}_k = 0.001 \cdot (k - 300); \\ k \geq 500, & \mathbf{d}_k = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Інтерпретації (12) на інтервалі $100 \leq k \leq 300$ відповідає раптова несправність у контрольному сенсорі, а на інтервалі $300 \leq k \leq 500$ – поступова сенсорна деградація. В якості початкових умов приймалися величини: $\mathbf{s}_0 = [0; 0; -1]^T$; $\mathbf{u}_k = 1$; $\hat{\mathbf{s}}_0 = [0; 0; 0]^T$; $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_3$. Процес відтворення запропонованої моделі зображено на рис. 1.

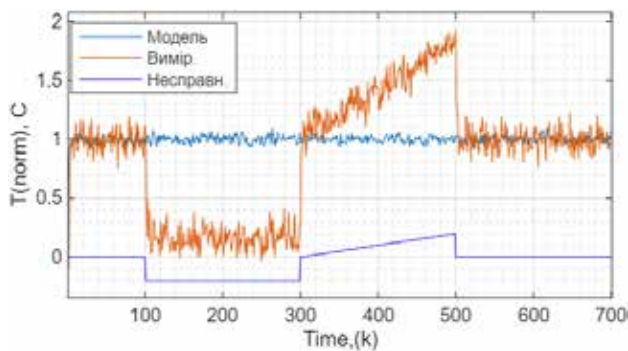


Рис. 1. Процес виникнення несправностей в сенсорній системі спостереження

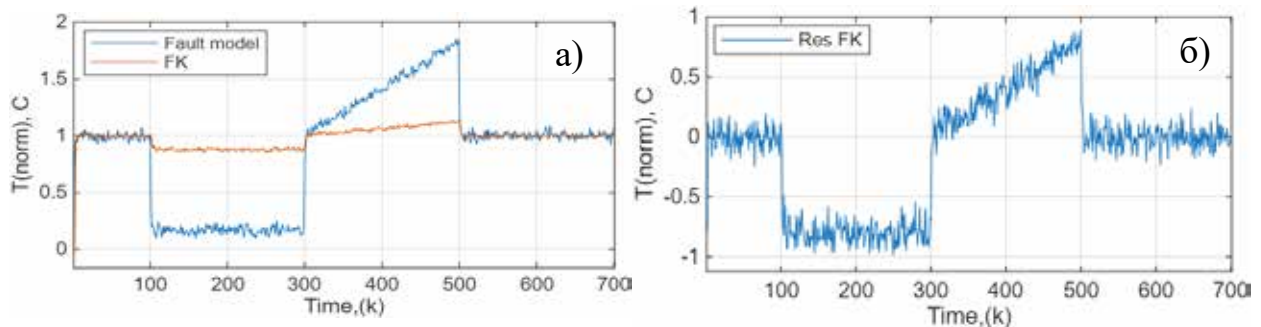


Рис. 2. Реакція стандартного фільтра Калмана на несправність каналу спостереження

Результати оцінювання складової вектору стану $\hat{\mathbf{s}}_k$ стандартним фільтром Калмана представлені на рис. 2 а. Сигнальна нев'язка \mathbf{r}_k утворена різницею між виходом фільтра та динамікою збуреної моделі на рис. 2 б.

Як вже було зауважено, при коректній роботі фільтра Калмана різницевий процес, який називається оновлювальним, являє собою не корельований гаусівський випадковий процес з нульовим середнім значенням і коваріаційною матрицею, рекурентно обчислюваною за формулою:

$$\mathbf{P} \mathbf{r}_{k+1} \triangleq E \{ \mathbf{r}_{k+1} \mathbf{r}_{k+1}^T \} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_k \left(\frac{k}{k} \right) \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}.$$

На рис. 3 наведені аналогічні результати для модифікованого фільтра Калмана.

Зіставлення графіків \mathbf{r}_k на рис. 2 та рис. 3 підтверджує коректну роботу тільки модифікованого фільтра Калмана, оцінки якого адекватно реагують на вплив відтворених несправностей. Отже, задача декомпозиції процесу оцінювання від впливів з невизначеною структурою вирішена задовільно.

Висновки. Проблема отримання оцінок станів лінійних динамічних систем, вільних від впливу структурно невизначених збурень є актуальною для багатьох прикладних досліджень, у тому числі й у галузі функціональної діагностики. У представленій роботі ця задача вирішена шляхом введення відповідного взаємо-однозначного перетворення рівняння виходу розглянутої системи, що дозволяє здійснити процес поглинання збурень ще на етапі екстраполяції з подальшим застосуванням модифікованого фільтра Калмана. На відміну від інших відомих методів проектування, запропонований метод характеризується відносно простим алгоритмом та реалізацією, а перевірка умов існування рішення не потребує занадто складних процедур, що робить його практично зручним для застосування.

Наведено аргументацію, спрямовану на підтвердження властивостей отриманого рішення,

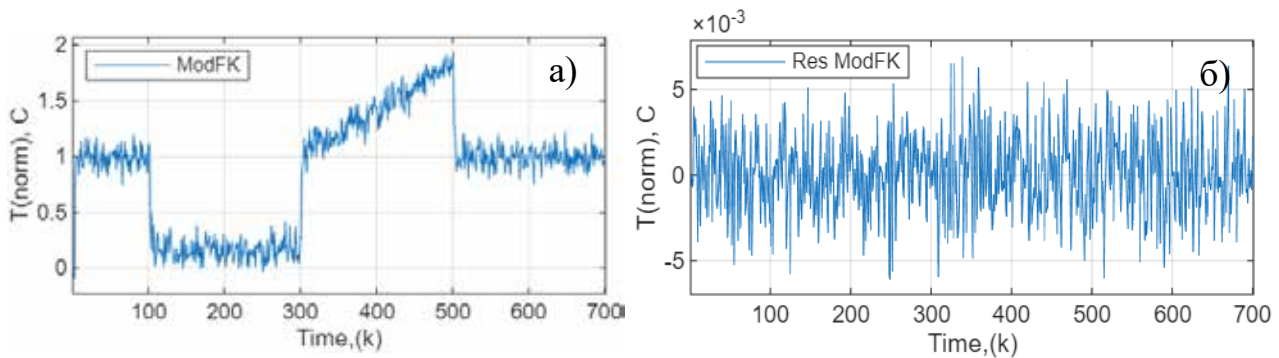


Рис. 3. Вихід модифікованого фільтра (а) та його різницевий сигнал (б)

серед яких стійкість, обмеженість та оптимальність. Зазначені характеристики розглядаються як фундаментальні критерії, що визначають коректність алгоритму та забезпечують його практичне застосування у задачах оцінювання й діагностики. Оскільки розглянуті питання ще не отримали достатнього висвітлення у науковій та періодичній літературі, є підстави стверджувати, що представлені результати містять елемент наукової новизни та розширюють тематику досліджень, пов'язаних

з оцінюванням станів динамічних систем, індиферентних до збурень довільної структури.

Із застосуванням принципів теорії прийняття рішень запропонований модифікований фільтр може бути використаний як діагностичний засіб, здатний не лише оцінювати динамічний стан об'єкта спостереження, але й виконувати функцію виявлення несправностей у сенсорній підсистемі, що підвищує надійність та інформативність процесу оцінювання.

Список літератури:

1. Saif M., Guan Y. Robust fault detection in systems with uncertainties,» Proceedings. *5th IEEE International Symposium on Intelligent Control*. 1990. Vol.1. Pp. 570–576. DOI: <https://doi.org/10.1109/ISIC.1990.128514>.
2. Volovyk A., Pyrih Y., Urikova O., Masiuk A., Shubyn B., Maksymyuk T. Dynamic System State Estimation with a Resilience to Observation Data Anomalies. *Contemp. Math*. 2024. Vol 5 Iss. 1 Pp 1–18. DOI: <https://doi.org/10.37256/cm.512024>
3. Zhao Z., Liu P. X., Gao J. A New Fault Detection Method for Systems With Uncertainty Under Denial-of-Service Attack. *IET Control Theory & Applications* 2025. No. 1: e70093. Pp 1–13. DOI: <https://doi.org/10.1049/cth2.70093>
4. Chen J., Zhang H. Robust detection of faulty actuators via unknown input observers. *International Journal of Systems Science*. 1991. Vol 22(10). Pp. 1829–1839. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207729108910753>
5. Huang S., Zhang D., Guo L., Wu L. Robust fault tolerant control for interconnected systems with dynamic uncertainties and actuator faults. Chinese Control And Decision Conference (CCDC). 2018. Pp. 2228–2233. DOI: <https://doi.org/10.1109/CCDC.2018.8407497>.
6. Gao N., Darouach M., Voos H., Alma M. New unified H_∞ dynamic observer design for linear systems with unknown inputs. *Automatica*. 2016. Vol. 665. Pp. 43–52. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automata.2015.10.052>.
7. Lan J., Patton R. A decoupling approach to integrated fault-tolerant control for linear systems with unmatched non-differentiable faults. *Automatica*. 2018. Vol. 89. Pp. 290–299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automata.2017.12.011>
8. Gillijns S. De M. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*. 2007. Vol. 43. Pp. 934–937. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automata.2006.11.016>
9. Lan J., Patton R. A decoupling approach to integrated fault-tolerant control for linear systems with unmatched non-differentiable faults. *Automatica*. 2018. Vol. 89. Pp. 290–299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automata.2017.12.011>
10. Воловик А. Оптимальні оцінки вектора стану для дискретних стохастичних систем з невизначеними збуреннями та шумом. *Інфокомунікаційні технології та електронна інженерія*. Львів, 2023. Вип. 3, № 2, С. 116–125. DOI: <https://doi.org/10.23939/ictee2023.09.067>
11. Bezzaoucha S., Voos H., Darouach M., Dentler J. On the unknown input functional observers design: A polytopic Takagi-Sugeno approach. *4th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. 2016. Pp. 31–37. DOI: <https://doi.org/10.1109/MED.2016.7535889>.

13. Wang L, Guan R. State Feedback Controller and Observer Design. *State Feedback Control and Kalman Filtering with MATLAB/Simulink Tutorials*. 2023. Pp.1–66. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781119694625.ch1>.
14. Southall B., Buxton B., Marchant J. (1998). Controllability and Observability: Tools for Kalman Filter Design. *British Machine Vision Conference*. 1998. DOI: <https://doi.org/10.5244/C.12.17>.
15. Kitanidis P. Unbiased minimum-variance linear state estimation. *Automatica*. 1987. Vol. 23. Pp. 775–778.
16. Hsieh C. Unbiased Minimum-Variance Input and State Estimation for Systems with Unknown Inputs: An Online Solution. *International Automatic Control Conference (CACSS)*. 2020. Pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/CACSS50047.2020.9289795>.
17. Zhang J. Unbiased minimum-variance disturbance and state estimation for linear systems with both state and output disturbances. *International Journal of Systems Science*. 2025. Vol. 56(1. Pp. 98–107. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207721.2024.2388806>

Volovyk A. Yu., Nikolenko M.S. ESTIMATING DYNAMIC SYSTEM STATE IN THE PRESENCE OF OBSERVATION CHANNEL FAULTS

Methods for estimating the dynamic systems states have found wide application in various fields of applied research. The most well-known of these is the Kalman filter method. When using this method, the results of observations by the sensory subsystem serve as the information source for correcting the assessment and the innovation process serves as a correct operation indicator of the assessment algorithm. For nominal operation, the difference signal is a Gaussian uncorrelated random process with zero mean and a priori computational covariance matrix. In the event of sudden malfunctions or unforeseen structurally uncertain disturbances in the sensor subsystem, these conditions are violated. The aim of this work is to develop a method that allows the normal operation of the Kalman filter to be restored under the stated conditions. The set goal is achieved by applying a special one-to-one transformation of the system output equation under study, as a result of which the disturbance component is absorbed in the extrapolation equation of the dynamic system state vector. The assumptions used to solve the problem coincide with those usually accepted in classical linear filtering theory, while the disturbances are completely arbitrary, cannot be described probabilistically and have no upper limit. To ensure the correctness of the solution to the problem, assumptions are made regarding the boundedness of system matrices which allow avoiding indeterminate solutions. At the next stage, a modified Kalman filter is applied to the corrected system in a certain way. Considerable attention is paid to the analysis of the properties of the resulting filter related to the estimation errors stability. The functional performance of the proposed method was confirmed by statistical modeling on a test example of a third-order linear dynamic system. Unlike other known design methods, the proposed method is characterized by a relatively simple algorithm and implementation and verification of the conditions for the existence of a solution does not require overly complex procedures which makes it practical and convenient to use. Unlike other well-known design methods, the proposed method is characterized by a relatively simple algorithm and implementation but the conditions for the existence of the solution do not require overly complex procedures, all of which makes it practical and convenient to use.

Keywords: *optimal state estimation in the presence of faults, linear dynamic systems, Kalman filter, structurally indeterminate disturbances.*

Дата першого надходження статті до видання: 19.01.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 11.02.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 08.04.2026